Correction

Exercice 1

Ex 1 :

1) a) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$= a^2+b^2+2\cdot 5$

$= a^2+b^2+10$

$a^2+b^2-10 \geq 0$

$a^2+b^2 \geq 10$

$\boxed{|a+b|^2} = \boxed{a^2+b^2} + \boxed{2ab} \geq \boxed{10} + 10 = \boxed{20}$

$|a+b|^2 \geq 20 \Rightarrow \sqrt{|a+b|^2} \geq \sqrt{20}$

$\Rightarrow |a+b| \geq 2\sqrt{5}$

a) $x^2 = (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

$= 6+\sqrt{11}+6-\sqrt{11}+2\boxed{\sqrt{6-\sqrt{11}}\sqrt{6+\sqrt{11}}}$

$= 12+2\sqrt{6^2-\sqrt{11}^2} = 12+2\sqrt{25} = 22$

$y^2 = a^2+b^2-2ab = 12-2\sqrt{25} = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} x^2 = 22 \\ x>0 \end{array}\right\} x = \sqrt{22}$

$\left.\begin{array}{l} y^2 = 2 \\ y>0 \end{array}\right\} y = \sqrt{2}$

$\begin{cases} \boxed{a+b} = \sqrt{22} \\ \boxed{a-b} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = \sqrt{22}+\sqrt{2} \\ 2b = \sqrt{22}-\sqrt{2} \end{cases}$ (+) (−)

$\begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{22}+\sqrt{2}}{2} \\ b = \dfrac{\sqrt{22}-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Exercice 2

Soit n un entier naturel.

1) Comparer $\dfrac{n}{n+1}$ et $\dfrac{n+1}{n+2}$

2) En déduire la comparaison des réels

$X = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{5}{6} \times \cdots\cdots \times \dfrac{47}{48}$ et

$Y = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{6}{7} \times \cdots\cdots \times \dfrac{48}{49}$

3) Calculer X Y, en déduire que $\dfrac{1}{7} \in \left]X , Y\right[$

1) soit $n \in \mathbb{N}$

$\dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{n(n+2)-(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$

$= \dfrac{n^2+2n-(n^2+2n+1)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{n}{n+1} < \dfrac{n+1}{n+2}}$

2)

$n=1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{3}$

$n=3 \Rightarrow 0 < \dfrac{3}{4} < \dfrac{4}{5}$

$n=5 \Rightarrow 0 < \dfrac{5}{6} < \dfrac{6}{7}$

$\cdots\cdots$

$n=47 \Rightarrow 0 < \dfrac{47}{48} < \dfrac{48}{49}$

$\xrightarrow{\text{produit}} X < Y$

$X < Y$

3) $XY = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{5}{6} \times \cdots \times \dfrac{47}{48} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{6}{7} \times \cdots \times \dfrac{48}{49} = \dfrac{1}{49}$

$0 < x < y \xrightarrow{\times x} x^2 < xy \Rightarrow x^2 < \frac{1}{49} \Rightarrow x < \frac{1}{7}$

$0 < x < y \xrightarrow{xy} 0 < xy < y^2 \Rightarrow \frac{1}{49} < y^2 \Rightarrow \frac{1}{7} < y$

d'ou $x < \frac{1}{7} < y$

Exercices

Soit a un réel telque $a+\frac{1}{a}$ soit un entier

1)On suppose que $a+\frac{1}{a} = 3$

Calculer $a^2+\frac{1}{a^2}$ et $a^3+\frac{1}{a^3}$

2)On suppose que $a^3+\frac{1}{a^3} = 110$

Calculer $a+\frac{1}{a}$

$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

1)

$a^2 + \frac{1}{a^2} = (a+\frac{1}{a})^2 - 2a\frac{1}{a}$

$= 3^2 - 2 = 7$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2$

$a^3 + \frac{1}{a^3} = (a+\frac{1}{a})^3 - 3a^2\frac{1}{a} - 3a\frac{1}{a^2}$

$= 3^3 - 3(a+\frac{1}{a}) = 27 - 3\times 3 = 18$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2$

$a^3 + \frac{1}{a^3} = (a+\frac{1}{a})^3 - 3a^2\frac{1}{a} - 3a\frac{1}{a^2} = (a+\frac{1}{a})^3 - 3(a+\frac{1}{a})$

$= 3^3 - 3a - 3\frac{1}{a}$

$= 27 - \underline{3(a+\frac{1}{a})} = 27 - 3\times 3 = 18$

Soit a un réel telque $a+\frac{1}{a}$ soit un entier

naturel

1)On suppose que $a+\frac{1}{a}=3$

Calculer $a^2+\frac{1}{a^2}$ et $a^3+\frac{1}{a^3}$

2)On suppose que $a^3+\frac{1}{a^3}=110$

Calculer $a+\frac{1}{a}$ $=5$

$a^3+\frac{1}{a^3}=110$

$\Leftrightarrow \left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right)=110$ (on pose $n=a+\frac{1}{a}$)

$\Leftrightarrow n^3-3n=110$

$\Leftrightarrow n(n^2-3)=110$

n divise 110

or $D_{110}=\{1, 2, \boxed{5}, 10, 11, 22, 55, 110\}$

$n=1 \Rightarrow 1^3-3\times1 \neq 110$

$n=2 \Rightarrow 2^3-3\times2 \neq 110$

$n=5$

$\Rightarrow 5^3-3\times5=125-15=115$

si $n>5$ $n^3-3n>110$

1)Comparer $1+\sqrt{5}$ et $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

$(1+\sqrt{5})^2=6+2\sqrt{5}$

$\sqrt{4+2\sqrt{3}}^2=4+2\sqrt{3}$

$\left.\begin{array}{l}6>4\\ 2\sqrt{5}>2\sqrt{3}\end{array}\right\}$ $6+2\sqrt{5}>4+2\sqrt{3} \Rightarrow 1+\sqrt{5}>\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

2)a) Soient a et b deux réels positifs. Montrer que $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

$a\in\mathbb{R}_+$ et $b\in\mathbb{R}_+$

$a+b-2\sqrt{ab}=\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$

$\Rightarrow a+b\geq 2\sqrt{ab}$

b)En déduire que pour tous a, b et c réels positifs, on a : $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$

$\left.\begin{array}{l}a+b\geq 2\sqrt{ab}\\ b+c\geq 2\sqrt{bc}\\ c+a\geq 2\sqrt{ca}\end{array}\right\}$ $\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a)\geq 2\sqrt{ab}\,2\sqrt{bc}\,2\sqrt{ca}=8abc$